

Achtung: Das Grundwissen steht im Lehrplan!

Tipps zum Grundwissen Mathematik Jahrgangsstufe 9

Folgende Begriffe und Aufgaben solltest Du nach der 9. Klasse kennen und können:

(Falls Du Lücken entdeckst, sieh in deinen Heften nach und wiederhole es gründlich!)

1. Zahlen

Die Quadratwurzel \sqrt{a} aus einer positiven Zahl a ist diejenige positive Zahl, deren Quadrat gleich a ist: $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$. a heißt **Radikand**.

Die Quadratwurzel aus 0 ist 0: $\sqrt{0} = 0$

Es gibt Quadratwurzeln, die **rationale** Zahlen sind: z. B. $\sqrt{4}$, $\sqrt{0,09}$ oder $\sqrt{\frac{9}{16}}$,

andere dagegen **irrationale** Zahlen: z.B. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ oder $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Die Menge der **reellen** Zahlen umfasst alle **rationalen** und **irrationalen** Zahlen.

Rechnen mit Quadratwurzeln

→ $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ falls $a \geq 0$ und $b \geq 0$.

→ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ falls $a \geq 0$ und $b > 0$.

aber **Vorsicht**: Summen und Differenzen dürfen **nicht** gliedweise radiziert werden,

d.h.: i.a. $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ und $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$. (Beispiel: $\sqrt{100-36} \neq \sqrt{100} - \sqrt{36}$)

→ teilweise radizieren: Bsp. $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4 \cdot \sqrt{3}$

$$\sqrt{u^3v^3} = \sqrt{u^2v^2uv} = u \cdot v \cdot \sqrt{uv}$$

→ unter die Wurzel ziehen: Bsp. $4 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4^2 \cdot 2} = \sqrt{32}$

$$\frac{2}{3} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{\frac{2^2}{3^2} \cdot 27} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$$

Die n-te Wurzel

Die n-te Wurzel aus nicht negativen Zahl a ist die nicht negative Lösung der Gleichung $x^n = a$.

Bsp. $\sqrt[3]{216} = 6$, denn $6^3 = 216$

$\sqrt[5]{243} = 3$, denn $3^5 = 243$

Potenzen mit rationalen Exponenten

Es wird definiert: $a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Es gelten die Potenzgesetze: Für positive reelle Zahlen a und b und rationale Zahlen r und s gilt

(i) für Potenzen mit gleicher Basis $\mathbf{a^r \cdot a^s = a^{r+s}}$ und $\mathbf{a^r : a^s = a^{r-s}}$

(ii) für Potenzen mit gleichem Exponenten $\mathbf{a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r}$ und $\mathbf{a^r : b^r = (a:b)^r}$

(iii) für Potenzen von Potenzen $\mathbf{(a^r)^s = a^{r \cdot s}}$

Binomische Formeln:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (Plusformel)

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (Minusformel)

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ (Plus-Minus-Formel)

2. Funktionen und funktionale Zusammenhänge

Die quadratischen Funktionen und quadratische Gleichungen

Eine Funktion f der Form $f: x \rightarrow a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ (mit $a \neq 0$) heißt **quadratische Funktion**.

Bsp. $f: x \rightarrow x^2$ (ihr Graph ist die Normalparabel)

$g: x \rightarrow x^2 - 2$ (Graph ist die um -2 in y -Richtung verschobene Normalparabel)

$h: x \rightarrow 3x^2 + 4x + 1$

Eine Gleichung der Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ heißt eine **quadratische Gleichung**, falls $a \neq 0$

Ihre Lösungen lassen sich mittels der **Lösungsformel**

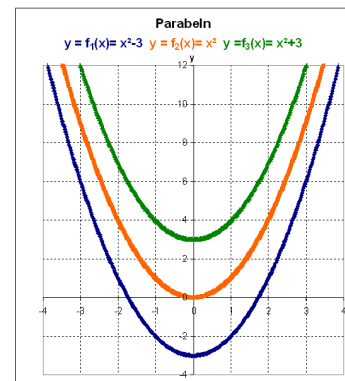
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{bestimmen.}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel, $b^2 - 4ac$, heißt **Diskriminante D**.

$D > 0 \Rightarrow$ es gibt zwei verschiedene Lösungen

$D = 0 \Rightarrow$ es gibt genau eine Lösung

$D < 0 \Rightarrow$ es existiert keine Lösung



Beachte:

- Mit Hilfe der Lösungsformel lassen sich - falls vorhanden - die Nullstellen der Parabel mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ berechnen.

- Jede quadratische Funktion mit der Gleichung $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ lässt sich durch **quadratisches Ergänzen** auf die **Scheitelpunktform** $f(x) = a(x + d)^2 + e$ bringen.

$S(-d/e)$ ist der Scheitel des Graphen.

Die Parabel ist nach oben (unten) geöffnet, falls $a > 0$ ($a < 0$).

Die Parabel ist „enger“ („weiter“) als die Normalparabel, wenn $|a| > 1$ ($|a| < 1$).
(\rightarrow siehe dein Heft!)

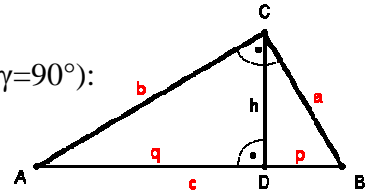
- Eine Gleichung der Form wie z.B. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ heißt **biquadratische Gleichung**. Sie lässt sich mittels der **Substitution** $x^2 = z$ auf die Form $z^2 - 13z + 36 = 0$ bringen. Aus den Lösungen dieser Gleichung kann man die Lösungen der Ausgangsgleichung bestimmen.
Hier: $z_1 = 4 \Rightarrow x_1 = -2$ und $x_2 = 2$
 $z_2 = 9 \Rightarrow x_3 = -3$ und $x_4 = 3$.

- Durch Lösen eines linearen Gleichungssystems mit drei Variablen lässt sich der Funktionsterm einer quadratischen Funktion bestimmen, falls man drei verschiedene Punkte ihres Graphen kennt.
(\rightarrow siehe dein Heft!)

3. Geometrie

3.1 Die Satzgruppe des Pythagoras für rechtwinklige Dreiecke (z.B. $\gamma=90^\circ$):

- Satz des Pythagoras : $a^2 + b^2 = c^2$
- Kathetensatz: $a^2 = c \cdot p$ bzw. $b^2 = c \cdot q$
- Höhensatz : $h^2 = p \cdot q$

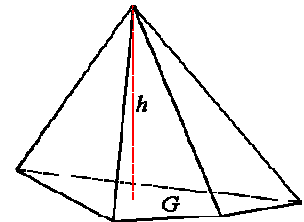


3.2 Für Berechnungen an Figuren und Körpern ist es hilfreich zu wissen:

- Diagonale im Quadrat : $a \cdot \sqrt{2}$ (a Seitenlänge)
- Raumdiagonale eines Würfels : $a \cdot \sqrt{3}$ (a Kantenlänge)
- Höhe im gleichseitigen Dreieck : $\frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$ (a Seitenlänge)
- Abstand zweier Punkte $A(a_1 / a_2)$ und $B(b_1 / b_2)$: $\overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

3.3 **Pyramide:**

Besitzt eine Pyramide die Grundfläche G und die Höhe h, so ist ihr Rauminhalt $V = \frac{1}{3} G \cdot h$

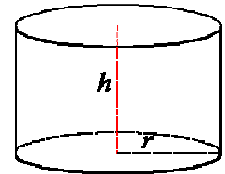


3.4 **Zylinder:** Es lässt sich berechnen

Volumen $V = G \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$

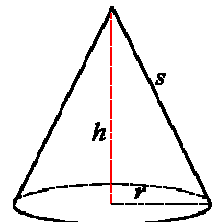
Mantelfläche $M = 2r \cdot \pi \cdot h$

Oberfläche $O = M + 2G = 2r \cdot \pi \cdot h + 2r^2 \cdot \pi$



3.5 **Kegel:** Volumen $V = \frac{1}{3} G \cdot h$; Mantelfläche $M = \pi \cdot r \cdot s$, wobei $s^2 = r^2 + h^2$

Oberfläche $O = r^2 \cdot \pi + \pi \cdot r \cdot s$



3.6 Sinus, Kosinus und Tangens

In jedem rechtwinkligen Dreieck ABC (mit $\gamma = 90^\circ$) gilt für den Winkel α :

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c} ; \cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} ; \tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b} .$$

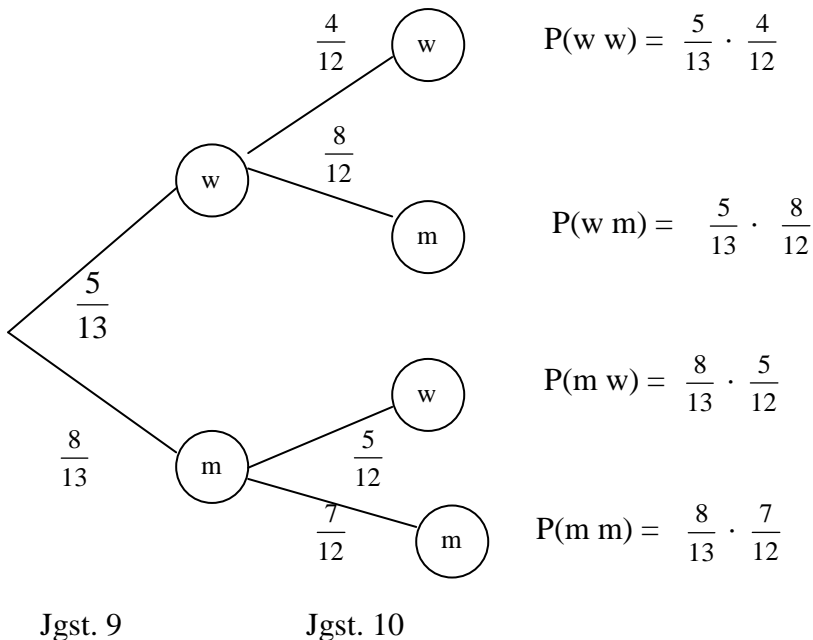
Weiterhin gilt für $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$:

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha ; & \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} ; \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha ; & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 . \end{aligned}$$

4. Stochastik

Mehrstufige Zufallsexperimente und die Pfadregeln:

Bsp. Am HSG unterrichten 5 Mathematiklehrerinnen (w) und 8 Mathematiklehrer (m) . Ein Schüler hat in den Jahrgangsstufen 9 und 10 nicht dieselbe Lehrkraft in Mathematik.



Pfadregel 1 : Man erhält die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses, indem man die Wahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Pfades multipliziert.

z.B.: $P(mm) = \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12}$.

Pfadregel 2 : Die Summe der Wahrscheinlichkeiten, die von einem Verzweigungspunkt ausgehen ist stets 1.

z.B.: $\frac{5}{13} + \frac{8}{13} = 1$; $\frac{4}{12} + \frac{8}{12} = 1$; $\frac{5}{12} + \frac{7}{12} = 1$.

Pfadregel 3 : Man erhält die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, indem man die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade bildet, die zu dem Ereignis gehören.

z.B.: $P(\text{die Mathelehrkräfte in Jgst. 9 und 10 sind unterschiedlichen Geschlechts}) = P(wm) + P(mw)$
 $= \frac{5}{13} \cdot \frac{8}{12} + \frac{8}{13} \cdot \frac{5}{12}$.